คณะกรรมการข้าราชการพลเรื่อน

การสอบแข่งขันเพื่อรับทุน ฯ ไปศึกษาวิชา ณ ต่างประเทศ ประจำปังบประมาณ 2551 (ทุนระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย)

<u>ข้อสอบวิชา</u> คณิตศาสตร์ สอบวันเสาร์ที่ 1 ธันวาคม 2550 เวลา 13.30 – 16.30 น. (จำนวน 20 หน้า 100 คะแนน)

(ให้ทำข้อ 1 ในสมุดเขียนตอบชุดที่ 1 ข้อ 2 ในสมุดเขียนตอบชุดที่ 2 ข้อ 3 ในสมุดเขียนตอบชุดที่ 3 ข้อ 4 ในสมุดเขียนตอบชุดที่ 4 และข้อ 5 ในสมุดเขียนตอบชุดที่ 5)

ก้าทำผิดชุดจะไม่ได้รับการตรวจ

- 1. (20 กะแนน)
 - 1.1 กำหนดให้เอกภพสัมพัทธ์ เป็นเซตของจำนวนจริง (R) จงแสดงวิธีการหาเซตคำตอบของอสมการ

$$\sqrt{x+2} > x-4$$

(10 คะแนน)

มีนักเรียนชั้น ม. 4 ชั้น ม. 5 และชั้น ม.6 จำนวน 1,215 คน 645 คน และ 225 คน ตามลำคับ ครูคนหนึ่งต้องการแบ่งนักเรียนแต่ละชั้นออกเป็นกลุ่มย่อย ๆ แต่ละกลุ่มเป็น นักเรียนชั้นเดียวกัน และทุกกลุ่มทุกชั้นปีมีนักเรียนจำนวนเท่ากัน และมีเศษเหลือเท่ากันทุก ชั้นปี จงแสดงวิธีการหา

- (1) จำนวนนักเรียนที่มากที่สุดในแต่ละกลุ่ม
- (2) จำนวนกลุ่มที่น้อยที่สุดของแต่ละชั้นปี
- (3) เศษเหลือของแต่ละชั้นปี

(10 คะแนน)

2. ให้เขียน <u>เฉพาะคำตอบ</u> ลงในสมุดเขียนตอบ ไม่ต้องแสดงวิธีทำ (20 คะแนน)

2.1 ให้ R เป็นเซตของจำนวนจริง และให้ a และ b เป็นจำนวนจริง

กำหนดให้ f และ g เป็นฟังก์ชันจาก R ไปยัง R นิยามโดย

$$f(x) = x^2 + 2bx + 1$$

$$g(x) = 2a(x+b)$$

สำหรับจำนวนจริง x ใคๆ จงหาคู่อันคับของจำนวนจริง (a,b) ทั้งหมดที่ทำให้กราฟของ y=f(x) และ กราฟของ y=g(x) ไม่ตัดกัน $(5\,$ กะแนน)

2.2 จงหาพหุนาม p(x) ทั้งหมดที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนจริงและสอดคล้องกับ

$$(x-4)p(2x) = 4(x-1)p(x)$$
 (5 คะแนน)

2.3 จงหาค่าของ x > 0 ทั้งหมคที่สอคคล้องกับสมการ

$$10^{x^2 + x} + \log x = 10^{x+1}$$
 (5 คะแนน)

2.4 วงกลมวงหนึ่งมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ (a,b) เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริง ถ้าพาราโบลา $y=x^2$ มีจุดร่วมกับวงกลมวงนี้ 3 จุดที่แตกต่างกันคือจุด (0,0) และ อีก 2 จุดอยู่บนเส้นตรง y=x+b แล้ววงกลมวงนี้มีรัศมียาวกี่หน่วย

(5 คะแนน)

- 3. มี 4 ข้อย่อยๆละ 5 คะแนน แสดงวิธีทำพอสังเขปในสมุดคำตอบ (20 คะแนน)
 - **3.1** ให้ $\overline{u}=\overline{j}+\overline{k}$ และ $\overline{v}=\overline{i}+\overline{k}$ และ \overline{w} เป็นเวกเตอร์ขนาคหนึ่งหน่วยอยู่ในระนาบเดียวกับ เวกเตอร์ \overline{u} และ \overline{v} และ \overline{w} ทำมุม $\frac{\pi}{6}$ กับทั้ง \overline{u} และ \overline{v} จงหา \overline{w}
- 3.2 กำหนดให้ เมทริกซ์ $A = \begin{bmatrix} x-2 & 0 & 2 \\ x & -2 & 0 \\ x & 0 & 3 \end{bmatrix}$ และ $\det(A) = x+9$ จงหา $(2A)^{-1}$
- 3.3 จงหาค่า $x \in [0, 2\pi]$ ทั้งหมดที่ทำให้ $(\sin\frac{x}{2})(\sin\frac{x}{2} \cos\frac{x}{2})(\cos x \sin x) > 0$
- **3.4** จงหาจำนวนเชิงซ้อน z ทั้งหมดที่สอดคล้องเงื่อนไข |2z-2+3i| < 2 และ $z^4 = 1+\sqrt{3}$ i
- 4. มีข้อย่อย 2 ข้อ คะแนนเต็ม 20 คะแนน แสดงวิธีทำทุกข้อ (20 คะแนน)
 - 4.1 กำหนดให้ $f(x) = x^3 3x + 1$
 - ก. จงเขียนกราฟคร่าว ๆ (sketch) ของ f(x) โดยให้กราฟแสดงจุดสูงสุดและต่ำสุด สัมพัทธ์ (relative max และ relative min) และจุดเปลี่ยนเว้า (inflection point)
 - ข. จงหาพื้นที่ที่ล้อมรอบโดยเส้นโค้ง $f(x) = x^3 3x + 1$ เฉพาะส่วน ที่เส้น โค้งคว่ำลง (concave down) กับเส้นตรง y = x + 1
- 4.2 กำหนดให้ $\frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 6} + \dots$ เป็นอนุกรมอนันต์ ถ้าให้ a_n เป็นเทอมที่ n ของอนุกรมที่กำหนดให้ และให้ $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$
 - ก. จงหา S_n และ $\lim_{x\to\infty} S_n$
 - ข. จงพิจารณาว่าลำคับ $S_1, S_2, S_3, ..., S_n, ...$ เป็นลำคับลู่เข้า (converge) หรือ ลู่ออก (diverge)
 - ค. จงพิจารณาว่าอนุกรมที่กำหนดให้เป็นอนุกรมลู่เข้า (convergent series) หรือลู่ออก (divergent series)
 - ง. ถ้าเป็นอนุกรมลู่เข้า จงหาผลบวกอนันต์

5. จงเขียนเฉพาะคำตอบ ลงในสมุดคำตอบ <u>ไม่ต้องแสดงวิธีทำ</u> (20 คะแนน)

5.1 (10 คะแนน)

อายุของตัวอย่างของเด็ก 8 คนเป็นดังนี้

5, 9, b, 2, a, 6, c, 5

โดยที่

ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของตัวอย่างเท่ากับ 6 ปี
มัธยฐานของตัวอย่างเท่ากับ 5.5 ปี
ความแปรปรวนตัวอย่างเท่ากับ 8 ปี²
ส่วนเบี่ยงเบนเฉลี่ยของตัวอย่างเท่ากับ 2.25 ปี
และ a < b < c แล้ว จงหาค่า a, b และ c

5.2 (5 คะแนน)

พิจารณาการทคลองสุ่ม ซึ่งมีปริภูมิตัวอย่างคังนี้

 $S = \{ a_1, a_2, a_3, a_4 \}$

โดยที่ a₁ มีโอกาสที่จะเกิดขึ้นเป็นสองเท่าของ a₂ a₂ มีโอกาสที่จะเกิดขึ้นเป็นสามเท่าของ a₃ a₃ และ a₄ มีโอกาสที่จะเกิดขึ้นเท่ากัน จงหาความน่าจะเป็นที่ a₁ จะเกิดขึ้น

5.3 (5 คะแนน)

กล่องใบหนึ่งมีลูกบอลสีแดง 5 ลูก สีคำ 4 ลูก สีขาว 2 ลูก และสีเขียว 1 ลูก ต้องการลูกบอล อย่างน้อย 1 ลูก แต่ไม่เกิน 3 ลูก โดยการสุ่มหยิบครั้งละ 1 ลูกแบบไม่ใส่คืน การหยิบจะสิ้นสุดถ้า หยิบได้ลูกบอลสีแดงหรือสีคำ จงหาความน่าจะเป็นที่จะหยิบได้ลูกบอลสีแดงก่อนที่จะได้ลูกบอล สีคำ