

การแข่งขันเพื่อรับทุน ฯ ไปศึกษาวิชา ณ ต่างประเทศ ประจำปีงบประมาณ พ.ศ. 2553
(ทุนระดับมัธยมศึกษาตอนต้น)

ข้อสอบวิชา คณิตศาสตร์

สอบวันเสาร์ที่ 17 ตุลาคม 2552 เวลา 9.00 – 12.00 น. (จำนวน 4 หน้า 100 คะแนน)

(ให้ทำข้อ 1 ในสมุดเขียนตอบชุดที่ 1 ข้อ 2 ในสมุดเขียนตอบชุดที่ 2 ข้อ 3 ในสมุดเขียนตอบชุดที่ 3 และข้อ 4 ในสมุดเขียนตอบชุดที่ 4)

ถ้าทำผิดชุดจะไม่ได้รับการตรวจ

1. ข้อสอบนี้มี 2 ข้อย่อย คะแนนเต็ม 25 คะแนน แสดงวิธีทำทุกข้อ

1.1 การก่อสร้างถนนสายหนึ่ง ประมาณ 14.6 กม. เพื่ออำนวยความสะดวกแก่
มนุษย์ เช่น การเดินทางสัญจร การขนส่ง รวมทั้งการตรวจการณ์ของ
เจ้าหน้าที่ แต่จากการวิจัยระยะเวลา 1 ปี พบว่ามีรถยนต์ผ่านถนนสายนี้
299,298 คัน มีสัตว์ที่ถูกรถชนตาย จำนวน 14,408 ตัว จำแนกเป็น สัตว์
สะเทินน้ำสะเทินบก 9,835 ตัว สัตว์เลื้อยคลาน 3,205 ตัว สัตว์เลี้ยงลูกด้วย
นม 1,051 ตัว และสัตว์จำพวกนก 317 ตัว

จงเขียนแผนภูมิรูปร่างกลมแสดงข้อมูลข้างต้น พร้อมทั้งแสดงวิธีทำ
(ทศนิยม 1 ตำแหน่ง) (15 คะแนน)

1.2 น้ำหนักของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่สามของนักเรียนกลุ่มหนึ่ง
มีค่าเฉลี่ยเลขคณิตเท่ากับ 40 กิโลกรัม แต่พบว่าตาชั่งที่ใช้ไม่เที่ยง
ถ้าจะให้ได้น้ำหนักที่ถูกต้อง ต้องเพิ่มน้ำหนักให้ทุกคนอีกคนละหนึ่ง
กิโลกรัม เมื่อเป็นเช่นนี้ ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของนักเรียนกลุ่มนี้จะ
เท่ากับเท่าไร จงพิสูจน์โดยการสมมุติตัวแปร (10 คะแนน)

2. ข้อสอบข้อนี้มี 3 ข้อย่อย คะแนนรวม 25 คะแนน ให้แสดงวิธีทำทุกข้อ

ในการคำนวณ ใช้ $\pi = 3.14$, $\sqrt{2} = 1.41$, $\sqrt{3} = 1.73$

2.1 สามเหลี่ยม ABC มี CD แบ่งครึ่งฐาน AB ที่จุด D จงพิสูจน์ว่า $2CD^2 = AC^2 + BC^2 - \frac{AB^2}{2}$

ถ้าเส้นมัธยฐานทั้งสามเส้นของสามเหลี่ยมยาว 6, 8, 10 หน่วย จงแสดงวิธีคำนวณหาความยาวของด้านที่สั้นที่สุดของสามเหลี่ยม (13 คะแนน)

2.2 ให้ $ABCD$ เป็นสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่มีด้านยาวด้านละ 2 หน่วย และวงกลมจุดศูนย์กลางที่ O มี AD เป็นเส้นผ่านศูนย์กลาง จุด E อยู่บนด้าน AB โดยที่ EC สัมผัสกับวงกลม O ที่จุด F จงแสดงวิธีคำนวณหาพื้นที่สามเหลี่ยม CBE (7 คะแนน)

2.3 สามเหลี่ยม ABC มีจุดยอดที่ $A(-1, 2)$, $B(2, 1)$, $C(0, 3)$ จงหาค่าแห่งของจุดยอดทั้งสามภายใต้การแปลงทางเรขาคณิต 3 ครั้ง ดังต่อไปนี้ตามลำดับ หมุนด้วยมุม 90° ในทิศทวนเข็มนาฬิกา สะท้อนเทียบกับเส้นตรง $y = x$ และเลื่อนขนานด้วยเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ ถ้าต้องการให้ทำการแปลงได้เพียง 2 ครั้งและมีผลสุดท้ายของการแปลงเหมือนกับการทำการแปลง 3 ครั้ง จงอธิบายว่าต้องทำการแปลงอย่างไร (5 คะแนน)

3. ข้อสอบข้อนี้มี 5 ข้อย่อย คะแนนรวม 25 คะแนน

3.1 ให้เขียนเฉพาะคำตอบ (3 คะแนน)

ผลการทดสอบย่อยของวิชาหนึ่งปรากฏว่ามีนักเรียน 32% ได้คะแนนไม่ถึงครึ่งหนึ่งของคะแนนเต็ม เมื่อผู้สอนนำแบบทดสอบของนักเรียนที่ได้คะแนนไม่ถึงครึ่งหนึ่งดังกล่าวมาตรวจให้คะแนนใหม่ ปรากฏว่าจำนวนนักเรียนที่ได้คะแนนไม่ถึงครึ่งหนึ่งของคะแนนเต็มลดลงจากจำนวนครั้งแรก 12.5% ถ้ามีนักเรียนเข้าทดสอบย่อยครั้งนี้ทั้งหมด 150 คน จงหาว่า มีนักเรียนที่ได้คะแนนตั้งแต่ครึ่งหนึ่งของคะแนนเต็มขึ้นไปกี่คน และคิดเป็นกี่เปอร์เซ็นต์ของจำนวนนักเรียนที่เข้าทดสอบ

3.2 ให้เขียนเฉพาะคำตอบ (3 คะแนน)

กำหนดให้ว่า “เมื่อ a, b และ d เป็นจำนวนนับ ถ้า ห.ร.ม. ของ a และ b คือ d แล้ว ห.ร.ม. ของ $\frac{a}{d}$ และ $\frac{b}{d}$ คือ 1”

จงหา ค.ร.น. ของ $\frac{a}{5}$ และ $\frac{b}{5}$ เมื่อกำหนดให้ ห.ร.ม. ของ a และ b คือ 5

3.3 ให้เขียนเฉพาะคำตอบ (3 คะแนน)

$$\text{กำหนดให้ } m \text{ เป็นจำนวนจริงบวกที่ทำให้ } \sqrt{16(m^2 + 1)} = 20$$

$$\text{และ } p = -2\sqrt{75} + \frac{27}{\sqrt{48}} + \sqrt{108}$$

$$\text{จงหาค่าของ } p^2 m \text{ เมื่อกำหนดให้ } \sqrt{6} = 2.4$$

3.4 ให้แสดงวิธีทำ (8 คะแนน)

นิค ก้อย และหน้อย สามคนเป็นเพื่อนกันและทำงานที่เดียวกัน ทุกคนจะออมเงิน โดยนำไปฝากกับธนาคารแห่งหนึ่ง เมื่อเดือนที่แล้วอัตราส่วนของยอดเงินฝากในบัญชีของนิกต่อก้อยต่อของหน้อยเป็น 5 : 3 : 4 เดือนนี้ทั้งสามคนได้รับเงินเพิ่มพิเศษคนละ 4,800 บาท จึ้นำเงินที่ได้รับนี้ไปฝากกับธนาคาร โดยที่นิกฝากเงิน $\frac{2}{3}$ ของเงินเพิ่มพิเศษ ก้อยฝากเงิน $\frac{3}{4}$ ของเงินเพิ่มพิเศษ หน้อยฝากเงินเพียง 880 บาท ทำให้อัตราส่วนของยอดเงินฝากในบัญชีของนิกต่อก้อยต่อของหน้อยเปลี่ยนเป็น 5 : 4 : 3 จงหาว่าหลังจากฝากเงินเพิ่มพิเศษตามจำนวนที่ต้องการแล้วทั้งสามคนมีเงินฝากในบัญชีคนละกี่บาท

3.5 ให้แสดงวิธีทำ (8 คะแนน)

มานะทำป้ายประกาศโดยตัดกระดาษเป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วที่มีฐานยาว 24 เซนติเมตร และด้านประกอบมุมยอดยาว 20 เซนติเมตร เมื่อเขาดูกระดาษที่ตัดได้ และเห็นว่ามีส่วนที่สำหรับเขียนข้อความน้อยไป จึงตัดกระดาษใหม่โดยเพิ่มความยาวของฐานจากเดิมไปอีก $\frac{1}{4}$ ของความยาวเดิม และเพิ่มความยาวของด้านประกอบมุมยอดจากเดิมไปอีก $\frac{1}{3}$ ของความยาวเดิม จงหาว่าป้ายประกาศอันใหม่จะมีพื้นที่เพิ่มจากป้ายประกาศอันเดิมประมาณกี่ตารางเซนติเมตร เมื่อกำหนดให้ $\sqrt{7} \approx 2.6$

4. ข้อสอบข้อนี้มี 4 ข้อย่อย จงแสดงวิธีทำทุกข้อ คะแนนรวม 25 คะแนน

4.1 ถ้าเรียกจำนวนนับที่เกิดจากจำนวนจำนวนหนึ่งยกกำลังสองว่า “จำนวนกำลังสอง” จะได้ว่า 4, 9, 16, 25, 36, 49, ... ต่างก็เป็นจำนวนกำลังสอง มุกดาสังเกตุจำนวนเหล่านี้และทดลองคำนวณเกี่ยวกับจำนวนกำลังสอง แล้วบอกคุณครูว่าเธอค้นพบข้อสรุปดังนี้

“ถ้านำจำนวนกำลังสองที่เรียงติดกันสองจำนวนมาลบกัน จะได้ว่าผลต่างของจำนวนทั้งสอง เท่ากับผลบวกของจำนวนนับสองจำนวนที่เรียงติดกันเสมอ”

มุกดาขยักตัวอย่าง ดังนี้

$$36 - 25 = 11 \text{ และ } 11 = 5 + 6$$

$$9 - 4 = 5 \text{ และ } 5 = 2 + 3$$

จงใช้วิธีการทางพีชคณิตแสดงว่า ข้อความที่มุกดาค้นพบเป็นจริง (8 คะแนน)

4.2 กำหนดให้ $P(x) = Ax^2 - Bx - 12$ และ $Q(x) = Ax^2 + Bx - 6$ ถ้า $x - 4$ หาร $P(x)$ ลงตัว และ $x + 3$ หาร $Q(x)$ ลงตัว จงหาค่าของ $\frac{2A - B}{2}$ (6 คะแนน)

4.3 รายการส่งเสริมการขายของบริษัทโทรศัพท์เคลื่อนที่แห่งหนึ่งคิดค่าใช้จ่ายโทรศัพท์ในแต่ละรอบบริการดังนี้ (ยังไม่รวมภาษีมูลค่าเพิ่ม)

“ค่าบริการ 250 บาท สำหรับการโทร 200 นาที การส่ง SMS 50 ครั้ง การส่ง MMS 10 ครั้ง การใช้อินเทอร์เน็ต 4 ชั่วโมง หากโทรเกิน 200 นาทีคิดเพิ่มนาทีละ 1.50 บาท ส่ง SMS เกินคิดเพิ่มครั้งละ 3 บาท ส่ง MMS เกินคิดเพิ่มครั้งละ 6 บาท ใช้อินเทอร์เน็ตเกินคิดเพิ่มนาทีละ 1 บาท”

(ก) จงเขียนสมการแสดงค่าบริการที่ต้องจ่ายสำหรับการใช้บริการส่งเสริมการขายรายการนี้ (3 คะแนน)

(ข) ถ้าแอนใช้บริการส่งเสริมการขายรายการนี้ ในรอบบริการที่ผ่านมาแอนใช้บริการการโทร 230 นาที ส่ง SMS 70 ครั้ง ส่ง MMS 9 ครั้ง ใช้อินเทอร์เน็ต 270 นาที แอนต้องจ่ายค่าบริการที่ยังไม่รวมภาษีมูลค่าเพิ่มเป็นเงินกี่บาท (2 คะแนน)

4.4 รูปสี่เหลี่ยมคางหมูรูปหนึ่งมีด้านคู่ขนานยาว $x + 1$ และ $2x + 3$ หน่วยตามลำดับ และระยะห่างระหว่างด้านคู่ขนานของรูปสี่เหลี่ยมคางหมูรูปนี้ เท่ากับ $x - 2$ หน่วย ถ้ารูปสี่เหลี่ยมรูปนี้มีพื้นที่ 16 ตารางหน่วย แล้ว ด้านคู่ขนานด้านยาวมีความยาวมากกว่าด้านสั้นกี่หน่วย (6 คะแนน)