

การสอบแข่งขันเพื่อรับทุน ฯ ไปศึกษาวิชา ณ ต่างประเทศ ประจำปีงบประมาณ 2552
(ทุนระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย)

ข้อสอบวิชา คณิตศาสตร์

สอบวันเสาร์ที่ 25 ตุลาคม 2551 เวลา 13.30 – 16.30 น. (จำนวน 3 หน้า 100 คะแนน)

(ให้ทำข้อ 1 ในสมุดเขียนตอบชุดที่ 1 ข้อ 2 ในสมุดเขียนตอบชุดที่ 2 ข้อ 3 ในสมุดเขียนตอบชุดที่ 3
ข้อ 4 ในสมุดเขียนตอบชุดที่ 4 และข้อ 5 ในสมุดเขียนตอบชุดที่ 5)

ถ้าทำผิดชุดจะไม่ได้รับการตรวจ

1. (20 คะแนน)

1.1 กำหนดข้อมูลต่อไปนี้

- สมการแสดงความสัมพันธ์ที่ใช้ประมาณจำนวนห้องพักที่มีแขกมาพักจริง (Y) จากจำนวนห้องพักที่มีการจองล่วงหน้า (X) คือ $Y = a + 0.75X$
- ค่าเฉลี่ยของจำนวนห้องพักที่มีการจองล่วงหน้าระหว่างวันที่ 16 – 30 กันยายน 2551 เป็น 40 และค่าเฉลี่ยของจำนวนห้องพักที่มีแขกมาพักจริงในช่วงเวลาเดียวกันเป็น 60
- โรงแรมมีจำนวนห้องพักที่มีการจองล่วงหน้าระหว่างวันที่ 1 – 15 ตุลาคม 2551 เป็นดังนี้

วันที่ (ตุลาคม 2551)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
จำนวนห้องพัก ที่มีการจอง ล่วงหน้า	25	27	30	45	50	28	30	27	26	32	48	48	30	21	20

จงหาค่าเฉลี่ยของจำนวนห้องพักที่จะมีแขกมาพักจริงโดยประมาณระหว่างวันที่ 1 – 15 ตุลาคม 2551

(10 คะแนน)

1.2 คะแนนวิชาคณิตศาสตร์ที่มีคะแนนเต็มเป็น 100 ของนักเรียนชั้นหนึ่งซึ่งมีจำนวนทั้งหมด 300 คน เมื่อนำมา
ทำตารางแจกแจงความถี่มีทั้งหมด 5 ชั้น โดยที่แต่ละชั้นมีความกว้างเท่ากัน ถ้าความน่าจะเป็นของ
อันตรภาคชั้นแรกคือ 1 – 20 มีค่าเท่ากับ 0.2 ค่ามัธยฐานเท่ากับ 40 ควอตีลที่ 3 เท่ากับ 61 และ
เปอร์เซ็นต์ไทล์ที่ 90 เท่ากับ 81

1.2.1 จงหาค่าเฉลี่ยเลขคณิตของคะแนนวิชาคณิตศาสตร์

1.2.2 ถ้านายวิชาสอบได้ 72 คะแนน จงหาค่ามาตรฐานของนายวิชา

(10 คะแนน)

2. เขียนเฉพาะคำตอบลงในสมุดเขียนตอบ ไม่ต้องแสดงวิธีทำ (20 คะแนน)

2.1 ให้ f เป็นฟังก์ชันกำหนดโดย $f(n) = n2^{-n}$, $n \in I^+$ จงหาค่าของ $\sum_{n=1}^{10} f(n)$
(7 คะแนน)

2.2 จงหาพื้นที่ที่มากที่สุดของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่สามารถบรรจุภายในวงกลมที่มีรัศมี r หน่วย โดยที่ r เป็นค่าคงตัว (7 คะแนน)

2.3 กำหนดให้ $1+2i$ เป็นคำตอบหนึ่งของสมการ $x^4 - 2x^3 + 9x^2 - 8x + 20 = 0$ จงหาผลบวกของขนาดของคำตอบทั้งหมดจากสมการนี้ (6 คะแนน)

3. (20 คะแนน)

3.1 ให้อักษร D, H, I, O, S, T และ W แต่ละตัว แทนตัวเลขที่ต่างกันจาก 0 ถึง 9 จงแสดงการวิเคราะห์ประกอบเหตุผล ในการหาค่าอักษรเหล่านี้เพื่อให้แผนผังการบวกข้างล่างนี้สมบูรณ์ (หากบอกเฉพาะตัวเลขโดยไม่ให้เหตุผลประกอบ จะไม่ได้คะแนน) (10 คะแนน)

$$\begin{array}{r} W H O \\ I S \\ \hline T H I S + \\ \hline I D I O T \end{array}$$

3.2 ให้ U เป็นเซตและ $f: U \rightarrow U$ เป็นฟังก์ชัน และสำหรับ $T \subseteq U$ นิยามให้

$$f^{-1}(T) = \{x \in U \mid f(x) \in T\}$$

ถ้า U คือเซตของจำนวนจริงทั้งหมดและกำหนด f โดย $f(x) = 1 - \frac{x}{2}$ สำหรับทุกๆ จำนวนจริง x
 $A = f^{-1}([0, 1])$ และ $B = f^{-1}(A)$ จงแสดงการวิเคราะห์เพื่อหาเซต $f^{-1}((B-A)^c)$
(10 คะแนน)

4. จงเขียนคำตอบของแต่ละข้อย่อยต่อไปนี้ลงในสมุดเขียนตอบ หน้าละไม่เกิน 1 ข้อย่อย โดยระบุหมายเลขข้อย่อยให้ชัดเจนไว้ที่มุมบนขวาของทุกหน้า ทั้งนี้ ให้เขียนคำตอบสำหรับคำถามในข้อนั้นๆ ก่อน แล้วจึงอธิบายเหตุผล ที่มาของคำตอบ หรือแสดงวิธีทำสั้นๆ พอเข้าใจ (20 คะแนน)

4.1 [6 คะแนน] ให้ \mathbb{R} แทนเซตของจำนวนจริง จงพิจารณาว่า มีฟังก์ชันไม่เชิงเส้น (non-linear function) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ซึ่ง $f \circ f = f$ หรือไม่ ถ้ามีจงยกตัวอย่าง ถ้าไม่มีจงพิสูจน์ว่าไม่มี

4.2 [7 คะแนน] เมทริกซ์แบบสามเหลี่ยมบนมิติ $n \times n$ คือเมทริกซ์ (matrix) $(a_{ij})_{n \times n}$ ซึ่ง $a_{ij} = 0$ สำหรับจำนวนเต็มบวก (positive integers) i และ j ใดๆ ซึ่ง $j < i \leq n$ ถ้า A เป็นเมทริกซ์แบบสามเหลี่ยมบนมิติ 3×3 ที่ไม่เป็นเมทริกซ์ศูนย์ (zero matrix) ซึ่งมีสมบัติว่า $A^n = A$ สำหรับทุกๆ จำนวนเต็มบวก n แล้ว จงแสดงว่า มีบางสมาชิก (element or entry) ของ A ที่มีค่าเป็น 1

4.3 [7 คะแนน] ให้ P และ Q เป็นจุด (points) ที่แตกต่างกันบนระนาบ (plane) ที่กำหนดให้ ถ้าวงกลม (circles) สองวงมีจุดศูนย์กลาง (centers) ที่ P และ Q เป็นวงกลมที่สัมผัสกันภายนอก (touch externally) และมีเส้นตรง (line) AB เป็นเส้นสัมผัสร่วม (common tangent) ซึ่งสัมผัสกับวงกลมทั้งสองที่จุด A และ B ตามลำดับ โดยที่ $A \neq B$ แล้ว เราจะเรียกจุดกึ่งกลาง (mid point) ของส่วนของเส้นตรง (line segment) AB ว่า “จุดกึ่งกลางเส้นสัมผัสร่วม” ของวงกลมทั้งสอง จงใช้เรขาคณิตวิเคราะห์ (analytic geometry) เพื่อตรวจสอบว่า เซตของจุดใดๆ บนระนาบที่เป็นจุดกึ่งกลางเส้นสัมผัสร่วมของวงกลมที่สัมผัสกันภายนอกและมี P และ Q เป็นจุดศูนย์กลาง เป็นภาคตัดกรวย (conic section) หรือไม่ ถ้าเป็น เป็นภาคตัดกรวยชนิดใด

5. จงแสดงวิธีทำหาคำตอบสั้น ๆ (20 คะแนน)

5.1 จงหาจำนวนจริง x ที่ทำให้

$$e^{\ln(x-1)} \cdot 2 \log_4 (x^2 - 2x - 15)^2 > 0 \quad (5 \text{ คะแนน})$$

5.2 จงหาค่าของ x ที่ $0 \leq x \leq 2\pi$ และ

$$\sin x + \cos x \geq -1 \quad (5 \text{ คะแนน})$$

5.3 จงหาค่าของจำนวนจริง x ที่ทำให้

$$\log_3(x+3) + \log_3(x-1) \leq 2 + \log_3 5 \quad (5 \text{ คะแนน})$$

5.4 ให้ $\vec{u} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$ และ $\vec{v} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ จงหาขนาดของ $2(\vec{u} \cdot \vec{v})(\vec{u} \times \vec{v})$ (5 คะแนน)