

การแข่งขันเพื่อรับทุน ฯ ไปศึกษาวิชา ณ ต่างประเทศ ประจำปีงบประมาณ พ.ศ. 2553  
(ทุนระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย)

ข้อสอบวิชา คณิตศาสตร์

สอบวันเสาร์ที่ 17 ตุลาคม 2552 เวลา 13.30 – 16.30 น. (จำนวน 3 หน้า 100 คะแนน)

(ให้ทำข้อ 1 ในสมุดเขียนตอบชุดที่ 1 ข้อ 2 ในสมุดเขียนตอบชุดที่ 2 ข้อ 3 ในสมุดเขียนตอบชุดที่ 3  
ข้อ 4 ในสมุดเขียนตอบชุดที่ 4 และข้อ 5 ในสมุดเขียนตอบชุดที่ 5)

**ถ้าทำผิดชุดจะไม่ได้รับการตรวจ**

1. (20 คะแนน)

1.1 ให้  $a$ ,  $b$  และ  $c$  เป็นจำนวนเต็มบวกโดย  $b$  เป็นตัวประกอบ (factor) ของ  $a$   
และ  $(b+c)$  เป็นตัวประกอบของ  $a$

$a$  และ  $b$  สัมพันธ์กันอย่างไร จงแสดงวิธีทำ (6 คะแนน)

1.2 ให้  $x, y$  เป็นจำนวนจริง  $A, B$  และ  $C$  เป็นเซต

สมมุติฐาน (1)  $A = \{(x, y) \mid y < \sqrt{x} \text{ และ } y \geq 0\}$

(2)  $B = \{(x, y) \mid y > -\sqrt{x} \text{ และ } y \leq 0\}$

(3)  $C = \{(x, y) \mid y^2 < x\}$

ผล  $A \cup B = C$

การสรุปนี้ สมเหตุสมผลหรือไม่ จงแสดงวิธีทำ (6 คะแนน)

1.3 จงเขียนแผนภาพเวเนอ์-ออยเลอร์ที่เป็นไปได้ทั้งหมด ซึ่งแทนความหมายประพจน์ต่อไปนี้

$[(p \wedge q) \rightarrow r] \wedge (p \rightarrow r)$  โดยเซต  $A, B$  และ  $C$  แทนประพจน์  $p, q$  และ  $r$  ตามลำดับ

จงแสดงวิธีทำหรืออธิบาย (8 คะแนน)

2. (20 คะแนน) แสดงวิธีทำอย่างคร่าวๆ คะแนนเต็มข้อย่อยละ 5 คะแนน

2.1 กำหนดให้  $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 1 & -3 & -3 \\ 1 & -2 & -4 \end{bmatrix}$  และ  $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

จงหาค่าของ  $AB$

2.2 จงหาค่าของ  $x$  ทั้งหมดที่สอดคล้องสมการ

$$x^5 + x^4 - x(x+1) = 0 \quad \text{และ} \quad x^5 - 4x^3 - x^2 + 4 = 0$$

2.3 กำหนดให้ เวกเตอร์  $\vec{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$  และ  $\vec{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$  ถ้า  $\vec{w}$  เป็นเวกเตอร์ที่ตั้งฉากกับ

$\vec{u}$  และ  $\vec{v}$  และมีขนาดเท่ากับ  $2|\vec{u} + 2\vec{v}|$  แล้ว จงหา  $\vec{w}$

2.4 เมือง  $B$  อยู่ห่างจากเมือง  $A$  ไปทางทิศตะวันตก 20 กิโลเมตร และอยู่ห่างจากเมือง  $C$  ไปทางทิศตะวันออกเฉียงใต้ 25 กิโลเมตร จงหาระยะทางระหว่างเมือง  $A$  กับเมือง  $C$

3. มีข้อย่อย 4 ข้อๆละ 5 คะแนน รวม 20 คะแนน  
จงแสดงวิธีทำสั้นๆ

3.1 จงหาค่า  $x$  และ  $y$  ที่สอดคล้องกับระบบสมการต่อไปนี้

$$\begin{aligned} x^2 &= 1 + 6\log_4 y \\ y^2 &= 2^x y + 2^{2x+1} \end{aligned}$$

3.2 จงแก้สมการต่อไปนี้

$$2^{4x} - 2^{3x+1} - 2^{2x} - 2^{x+1} - 2 \leq 0$$

3.3 เส้นทแยงมุมของสี่เหลี่ยมจัตุรัสรูปหนึ่งมีจุดปลายทั้งสองเป็นจุดตัดแกน  $x$  และ  $y$  ของเส้นตรง  $7x + 5y = 35$  จงหาพิกัดของจุดปลายทั้งสองของเส้นทแยงมุมอีกเส้นหนึ่งของสี่เหลี่ยมจัตุรัสนี้

3.4 กำหนดวงกลม  $C_1(a)$  และ  $C_2(a)$  ดังต่อไปนี้

$$C_1(a): x^2 + y^2 + 2ax + 4ay - 3a^2 = 0$$

$$C_2(a): x^2 + y^2 - 8ax - 6ay + 7a^2 = 0$$

จงแสดงว่าวงกลมสองวงสัมผัสกัน (นั่นคือตัดกันที่จุด ๆ เดียว) สำหรับทุก ๆ  $a > 0$  และหาพิกัดของจุดสัมผัสนั้น

4. (20 คะแนน)

ข้อ 4.1 แสดงวิธีพิสูจน์ ข้อ 4.2 เขียนเฉพาะคำตอบ

4.1 จงพิสูจน์ว่าฟังก์ชันพหุนาม (10 คะแนน)

$$f(x) = x^{101} + x^{51} + x + 1 \text{ ไม่มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์หรือค่าต่ำสุดสัมพัทธ์}$$

4.2 จงหาค่าของ  $A+B$  เมื่อ (10 คะแนน)

$$A = 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^n \text{ โดยที่ } n \text{ เป็นคำตอบของสมการ}$$

$$1 + \log_{\sqrt{2}} 2 + \log_{\sqrt{2}} 2 + \dots + \log_{\sqrt{2}} 2 = n^2 - 15 \text{ และ}$$

$$B = \sum_{i=0}^6 [!(i)]$$

โดยกำหนด  $!(i)$  ซึ่ง  $i$  เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบดังนี้

$$!0 = 1$$

$$!(i) = i + !(i-1)$$

คำตอบ  $A+B = \dots\dots\dots$

5. (20 คะแนน) ให้แสดงวิธีทำ

5.1 นางสนใจเปิดร้านขายอาหารแห่งหนึ่ง มีแผนที่จะขยายกิจการโดยการส่งอาหารที่ลูกค้าสั่งทางโทรศัพท์ไปถึงบ้านลูกค้า จึงได้ทำการทดลองส่งอาหารให้ลูกค้าจำนวนหนึ่ง พบว่า เวลาที่ใช้ในการส่งอาหารโดยเฉลี่ยเท่ากับ 18 นาที และค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับ 4 นาที ถ้านางสนใจเริ่มบริการส่งอาหารถึงลูกค้า จะต้องให้พนักงานรับโทรศัพท์บอกลูกค้าว่าจะส่งอาหารได้ภายในกี่นาที โดยมีความเชื่อมั่น (ก) ร้อยละ 95 (ข) ร้อยละ 99 ถ้าเวลาในการปรุงอาหารทั้งหมดจะเสร็จภายใน 15 นาที (10 คะแนน)

5.2 จากรายการซ่อมแซมเครื่องซักผ้า 6 เครื่อง ปรากฏผลดังนี้

- จำนวนปีที่ใช้งาน ( $X$ ) โดยเฉลี่ยเท่ากับ 2 ปี โดยมีค่าความแปรปรวนเท่ากับ  $2/3$
- ค่าซ่อมแซมต่อปี ( $Y$ ) โดยเฉลี่ยเท่ากับ 700 บาท

$$\sum_{i=1}^6 X_i Y_i = 9700$$

ถ้าสมการแทนความสัมพันธ์ระหว่างค่าซ่อมแซมต่อปี และจำนวนปีที่ใช้เป็นสมการเส้นตรง จงหา

- ก. สมการที่ใช้แทนความสัมพันธ์นี้ (5 คะแนน)
- ข. ถ้าเครื่องซักผ้าเครื่องหนึ่งมีอายุการใช้งาน เท่ากับ 4 ปี จะต้องเสียค่าซ่อมแซมต่อปีประมาณเท่าใด (5 คะแนน)