

การสอบแข่งขันเพื่อรับทุน ฯ ไปศึกษาวิชา ณ ต่างประเทศ ประจำปีงบประมาณ พ.ศ. 2554
(ทุนระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย)

ข้อสอบวิชา คณิตศาสตร์

สอบวันเสาร์ที่ 13 พฤศจิกายน 2553 เวลา 13.30 - 16.30 น. (จำนวน 5 หน้า 100 คะแนน)

(ให้ทำข้อ 1 ในสมุดเขียนตอบชุดที่ 1 ข้อ 2 ในสมุดเขียนตอบชุดที่ 2 ข้อ 3 ในสมุดเขียนตอบชุดที่ 3
ข้อ 4 ในสมุดเขียนตอบชุดที่ 4 และข้อ 5 ในสมุดเขียนตอบชุดที่ 5)

ถ้าทำผิดชุดจะไม่ได้รับการตรวจ

ข้อ 1. (20 คะแนน)

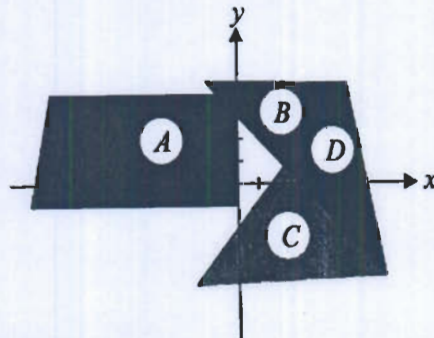
1.1 ให้ R แทนเซตของจำนวนจริงทั้งหมด (4 คะแนน)

1.1.1 จงเขียนกราฟของคู่อันดับ $(x, y) \in R \times R$ ทั้งหมดซึ่งสอดคล้องระบบสมการ

$$\text{ข้อจำกัด} \begin{cases} x + y \geq 0 \\ x - 2y \leq 4 \\ x \geq y \\ x + 2y \leq 10 \end{cases} \text{ พร้อมทั้งบอกค่า } x + y \text{ ที่มากที่สุดสำหรับ } (x, y) \text{ ซึ่ง}$$

สอดคล้องระบบสมการข้อจำกัดนี้

1.1.2 จงเขียนระบบสมการข้อจำกัด ที่มีกราฟเป็นส่วนที่แรเงา A ในแผนภาพต่อไปนี้



1.2 (5 คะแนน)

ให้ $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -4 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ และ B เป็นเมทริกซ์ซึ่ง $AB = BA$ เป็นเมทริกซ์เอกลักษณะ

จงแสดงการวิเคราะห์พหุคูณเพื่อหา $\text{adj}(B)$

1.3 (5 คะแนน)

ให้ P_1 คือระนาบที่ประกอบด้วยเวกเตอร์ $\vec{U} = \vec{i} + 3\vec{k}$ และ $\vec{V} = \vec{j} + \vec{k}$ และให้ P_2 คือระนาบที่ประกอบด้วยเวกเตอร์ $\vec{A} = -\vec{i} + \vec{k}$ และ $\vec{B} = 2\vec{i} + \vec{j}$ แล้ว $\vec{i} + 4\vec{j} + 7\vec{k}$ เป็นเวกเตอร์ที่ขนานกับระนาบทั้งสองใช่หรือไม่ จงแสดงการวิเคราะห์ให้เห็นจริง

1.4 (6 คะแนน)

จงกล่าวว่าข้อความต่อไปนี้เป็นจริงหรือไม่ พร้อมให้เหตุผลประกอบคำตอบพอสังเขป

1.4.1 ถ้า z เป็นจำนวนเชิงซ้อนซึ่งเป็นรากของสมการ $\bar{z} = z^2$ แล้ว z จะอยู่บนเส้นรอบวงของวงกลมหน่วยใช่หรือไม่

1.4.2 ถ้า z เป็นจำนวนเชิงซ้อนที่อยู่บนเส้นรอบวงของวงกลมหน่วยและเป็นรากของสมการ $\bar{z} = z^2$ แล้วส่วนจินตภาพของ z เป็นศูนย์หรือไม่ก็ส่วนจริงของ z คือ $-\frac{1}{2}$ ใช่หรือไม่

1.4.3 จงวิเคราะห์หาเซตคำตอบทั้งหมดของสมการ $\bar{z} = z^2$

ข้อ 2. (20 คะแนน)

2.1 นิยาม ลำดับฮาร์มอนิกคือลำดับของจำนวนจริงซึ่งลำดับของส่วนกลับของพจน์ทุกพจน์เป็นลำดับเลขคณิต เช่น $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$ เป็นลำดับฮาร์มอนิก เนื่องจาก $1, 2, 3, \dots, n, \dots$ เป็นลำดับเลขคณิต เป็นต้น (10 คะแนน)

กำหนดให้จำนวนจริง a_1, a_2, \dots, a_n เป็นลำดับฮาร์มอนิก จงพิสูจน์ว่า

$$a_1 a_2 + a_2 a_3 + \dots + a_{n-1} a_n = (n-1) a_1 a_n$$

2.2 ก. จงใช้ทฤษฎีบทของอนุพันธ์หาค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน $f(x) = x + \frac{1}{x}$ บนเซตของจำนวนจริงบวก (5 คะแนน)

ข. จงหาค่า $a > 0$ ที่เป็นไปได้ทั้งหมด ที่ทำให้พื้นที่ของบริเวณที่ปิดล้อมโดยกราฟของพาราโบลา

$$y = x - ax^2 \text{ และ } y = \frac{x^2}{a} \text{ มีค่ามากที่สุด (5 คะแนน)}$$

ข้อ 3. (20 คะแนน)

3.1 ให้เขียนเฉพาะคำตอบ (5 คะแนน)

ระยะเวลาในการเดินทาง (นาที) จากบ้านไปโรงเรียนของนักเรียนกลุ่มหนึ่งเป็นดังนี้

17, 11, 3, 9, 10, 4, 6, 13, 22, 8, a, 5, 7, 15

โดยที่ a เป็นจำนวนจริงบวก ค่ามาตรฐานของ a เท่ากับ 0 ถ้าข้อมูลชุดนี้มีมา 6 จำนวน จงหาความน่าจะเป็นที่ค่ามัธยฐานของข้อมูล 6 จำนวนนี้มีค่าเท่ากับ a (ตอบเป็นเศษส่วนอย่างต่ำ)

3.2 ให้เขียนเฉพาะคำตอบ (5 คะแนน)

พิจารณาสมการเส้นตรงสองสมการ โดยที่ความชันของสมการทั้งสองมีเครื่องหมายต่างกัน กราฟของสมการทั้งสองตัดกันที่จุดซึ่งมีพิกัดจุด (5, 23) ถ้าผลรวมของระยะตัดแกน Y และผลต่างของระยะตัดแกน Y ของสมการทั้งสองเท่ากับ 46 และ 7 ตามลำดับ แล้ว จงหาสมการของเส้นตรงทั้งสองสมการ

3.3 ให้แสดงวิธีทำ (10 คะแนน)

พิจารณตารางแจกแจงความถี่ของคะแนนสอบวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนกลุ่มหนึ่งดังต่อไปนี้

คะแนนสอบ	ความถี่
3-5	1
6-8	2
9-11	a
12-14	b
15-17	2

โดยที่ คะแนนสอบเฉลี่ยเท่ากับ 10.75 คะแนน และเปอร์เซ็นต์ไทล์ที่ 80 ของคะแนนสอบเท่ากับ 13.6
คะแนน แล้ว จงหาค่า a และ b

ข้อ 4 ต้องแสดงวิธีทำทุกข้อย่อย (20 คะแนน)

4.1 จงหาเซตคำตอบของ $\log(\sqrt{3}\sin(x) + \cos(x)) < 0$ เมื่อ $x \in [0, 4\pi]$ (5 คะแนน)

4.2 ให้ $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ และ $g(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ จงแสดงว่า

$$f(2x) = 2f(x)g(x) \quad (2 \text{ คะแนน})$$

$$\text{และ } f(x+y) = f(x)g(y) + f(y)g(x) \quad (3 \text{ คะแนน})$$

4.3 กำหนด P คือพาราโบลาที่มีสมการ $x^2 - 6x - 4y - 15 = 0$ จงหาสมการของกราฟที่เกิดจากการเคลื่อนที่ของจุดบนระนาบเดียวกับ P โดยที่ระยะทางจากจุดใดจุดบนกราฟถึงโคเรกตริกซ์ของ P ว่าเป็นสองเท่าของระยะทางถึงจุดโฟกัสของ P และบอกด้วยว่ากราฟที่ได้เป็นภาคตัดกรวยหรือไม่ถ้าเป็นให้บอกชื่อด้วย (5 คะแนน)

4.4 รูปสามเหลี่ยม ABC มีความยาวด้าน $AB = 21$ $AC = 17$ $BC = 10$ ถ้าต่อด้าน AB ภาย B ถึงจุด D และ θ เป็นขนาดของมุม CBD จงหาค่า $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) - \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$ (5 คะแนน)

5. ให้เขียนเฉพาะคำตอบลงในสมุดเขียนตอบ ไม่ต้องแสดงวิธีทำ (20 คะแนน)

5.1 สำหรับเซต S ใดๆ ให้ $n(S)$ แทนจำนวนสมาชิกของเซต S และ

$P(S)$ แทนเพาเวอร์เซตของเซต S

ถ้า A, B และ C เป็นเซตที่สอดคล้องกับ

$$n(P(A)) + n(P(B)) + n(P(C)) = n(P(A \cup B \cup C)) \text{ และ}$$

$$n(A) = n(B) = 100$$

แล้วค่าต่ำสุดของ $n(A \cap B \cap C)$ เท่ากับเท่าใด (5 คะแนน)

5.2 จงหาเซตของจำนวนจริง x ทั้งหมดที่สอดคล้องกับสมการ

$$\sqrt{2x+1} + \sqrt{x+3} = 3 + \sqrt{x+7} \quad (5 \text{ คะแนน})$$

5.3 ถ้า a, b, c เป็นจำนวนเต็มบวก มีสมบัติสอดคล้อง 3 ข้อต่อไปนี้

(ก) $2c$ หาร ab ลงตัว

(ข) $5a$ หาร bc ลงตัว

(ค) $7b$ หาร ca ลงตัว

แล้วค่าต่ำสุดของ abc เท่ากับเท่าใด (5 คะแนน)

5.4 กำหนดฟังก์ชัน $f(x) = ax^2 + bx + c$ เมื่อ a, b, c เป็นจำนวนจริง

และ $a \neq 0$ มีสมบัติสอดคล้อง 3 ข้อต่อไปนี้

(ก) $f(x-3) = f(1-x)$ สำหรับทุกจำนวนจริง x

(ข) $x \leq f(x) \leq \frac{x^2+1}{2}$ สำหรับทุกจำนวนจริง x

(ค) $f(x)$ มีค่าต่ำสุดเท่ากับ 0

จงหาจำนวนเต็มบวก $m > 1$ ที่มากที่สุดที่มีสมบัติสอดคล้องกับ

มีจำนวนจริง t ซึ่ง $f(x+t) \leq x$ สำหรับทุก x ในช่วง $[1, m]$